

**HOPF BIFURCATION ANALYSIS ON
NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS**

TEE LOONG SOON

**MASTER OF SCIENCE
UNIVERSITI MALAYSIA TERENGGANU**

2014

**HOPF BIFURCATION ANALYSIS ON
NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS**

TEE LOONG SOON

**Thesis Submitted in Fulfilment
of the
Requirement for the
Degree of Master of Science in the
School of Informatics and Applied Mathematics
University Malaysia Terengganu
August 2014**

DEDICATION

To my loving, caring and wonderful parents,

Tee Thian Poh and Low Chew Thai,

To my lovely brother, Dicky Tee Loong Chuan,

Special thanks to,

Chong Hoi Tian and Adrian Ahmad,

Without their constant support and emotional love none of this would have
happened.

Abstract of thesis presented to the Senate of Universiti Malaysia Terengganu in fulfilment of the requirement for the degree Master of Science

HOPF BIFURCATION ANALYSIS ON NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

TEE LOONG SOON

August 2014

Main Supervisor : Associate Professor Zabidin bin Salleh, Ph.D.

School : Informatics and Applied Mathematics

Dynamical systems have been very prominent for their various functions in real life, for instance in the population growth model. There have been many researched systems such as the Liu system, Chen system, Lü system, Qi system and Zhou system that have been studied intensively. Our main research here is on a modified Lorenz system. These systems were researched because they exhibit a lot of unique behaviours that are worth discovering, for example the stability of the equilibrium points, the centre manifold and the Hopf bifurcation analysis of the system. Furthermore, our interest also falls onto the Zhou system. In order to determine the stability of the equilibrium points of the system, the Routh-Hurwitz Criterion was utilised. The Routh-Hurwitz Criterion showed that the equilibrium points in the modified Lorenz system can be unstable in a certain instant. The Centre Manifold Theory was employed with the purpose of locating the centre manifold. As for the Hopf bifurcation, two similar but different methods, named first Lyapunov coefficient and Normal Form Theory, are exercised to find the directions of Hopf bifurcation for the modified Lorenz system. Through this analysis, the bifurcation values were obtained to calculate the direction of Hopf bifurcation for both systems. It was shown that the modified Lorenz system undergoes a subcritical Hopf

bifurcation when $b = \frac{3}{5}a$ and the value of $c = \frac{20}{3}$ at the equilibrium point using first Lyapunov coefficient. To understand the properties in greater depth, the dynamics on centre manifold of the modified Lorenz system was calculated and illustrated. For a more general case, the Normal Form Theory was exploited to find the directions of the modified Lorenz system and was summarised in Theorem 4.4.1. The employment of both methods yielded the similar findings. Nonetheless, by applying the Lyapunov coefficient, the direction of Hopf bifurcation for the Zhou system is found and the results are presented in Chapter 5. The Zhou system undergoes a supercritical Hopf bifurcation at the equilibrium points $a > 1$.

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Malaysia Terengganu
sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Sarjana Sains

ANALISIS PENCABANGAN HOPF PADA SISTEM DINAMIK TAK LINEAR

TEE LOONG SOON

Ogos 2014

Penyelia Utama : Profesor Madya Zabidin Bin Salleh, Ph.D.

Pusat Pengajian : Informatik dan Matematik Gunaan

Sistem dinamik merupakan salah satu topik yang menjadi tumpuan untuk kegunaan seharian, sebagai contoh dalam model pertumbuhan populasi. Terdapat banyak sistem seperti sistem Liu, sistem Chen, sistem Lü, sistem Qi, dan sistem Zhou yang telah dikaji secara mendalam. Kajian utama kami adalah pada sistem Lorenz yang telah diubahsuai. Sistem ini diperkenalkan kerana sistem ini mempunyai banyak telatah menarik yang berbaloi untuk dikaji, sebagai contoh, kestabilan pada titik keseimbangan, pancarongga tengah (*centre manifold*) dan analisis pencabangan Hopf bagi sistem. Selain itu, kajian pencabangan Hopf bagi sistem Zhou juga dipertimbangkan. Bagi memastikan kestabilan pada titik keseimbangan pada sistem yang dipertimbangkan, Kriteria Routh-Hurwitz telah digunakan. Kriteria Routh-Hurwitz menunjukkan titik keseimbangan pada sistem Lorenz yang telah diubahsuai boleh menjadi tidak stabil pada sesuatu masa. Teori Pusat Pancarongga (*Centre Manifold Theory*) telah dipergunakan dalam tujuan untuk mengesan pancarongga tengah tersebut. Untuk pencabangan Hopf pula, dua kaedah yang serupa tetapi berbeza, iaitu pekali pertama Lyapunov dan Teori Bentuk Normal (*Normal Form Theory*), digunakan untuk mencari arah pencabangan Hopf bagi sistem Lorenz yang

telah diubahsuai. Dengan menggunakan pekali pertama Lyapunov, Sistem Lorenz yang telah diubahsuai oleh Tee & Salleh mengalami pencabangan Hopf subkritikal apabila nilai $b = \frac{3}{5}a$ dan nilai c adalah $\frac{20}{3}$ pada titik seimbang. Bagi kes yang lebih umum, Teori Bentuk Normal telah digunakan untuk mencari arah pancabangan Hopf pada sistem Lorenz yang telah diubahsuai dan hasilnya telah diringkaskan dalam Teorem 4.4.1. Daripada hasil kajian, kedua-dua kaedah memberikan penyelesaian yang sama. Untuk memahami sifat-sifat dengan lebih mendalam, pancarongga tengah bagi sistem Lorenz yang telah diubahsuai telah dikira dan diberilustrasikan. Dengan menggunakan pekali pertama Lyapunov, arah pencabangan Hopf bagi sistem Zhou juga dikaji dan hasilnya dibincangkan di dalam Bab 5. Sistem Zhou mengalami pencabangan Hopf superkritikal pada titik seimbang apabila $a > 1$.