[illegible] PENGUBAHSUAIAN KAEDAH NEWTON BAGI PERINGKAT KETIGA DAN KELIMA

RAJEE A/P KERISNAN

FAKULTI SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA TERENGGANU
[illegible]

Membandingkan penumpuan pengubahsuaian kaedah newton bagi peringkat ketiga dan kelima / Rajee Kerisnan.

	1100076432	

Lihat sebelah

MEMBANDINGKAN PENUMPUAN PENGUBAHSUAIAN KAEDAH NEWTON BAGI PERINGKAT KETIGA DAN KELIMA

Oleh
Rajee a/p Kerisnan

Projek Ilmiah Tahun Akhir ini diserahkan untuk memenuhi
sebahagian keperluan bagi
Ijazah Sarjana Muda Sains (Matematik Kewangan)

JABATAN MATEMATIK
FAKULTI SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI MALAYSIA TERENGGANU
2009

JABATAN MATEMATIK

FAKULTI SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITI MALAYSIA TERENGGANU

PENGAKUAN DAN PENGESAHAN LAPORAN MAT 4499 B

Adalah ini diakui dan disahkan bahawa laporan penyelidikan bertajuk MEMBANDINGKAN PENUMPUAN PENGUBAHSUAIAN KAEDAH NEWTON BAGI PERINGKAT KETIGA DAN KELIMA oleh Rajee a/p Kerisnan No. Matriks: UK13106 telah diperiksa dan semua pembetulan yang disarankan telah dilakukan. Laporan ini dikemukakan kepada Jabatan Matematik sebagai memenuhi sebahagian daripada keperluan memperolehi Ijazah Sarjana Muda Sains Matematik Kewangan, Fakulti Sains dan Teknologi, UMT.

Disahkan oleh:

....

Penyelia Utama

Nama: Prof. Dr. Haji Ismail bin Mohd

Cop Rasmi: Tarikh:

....

....

Ketua Jabatan Matematik

Nama: Dr. Haji Mustafa bin Mamat

Cop Rasmi: Tarikh: 7/5/09

....

DR. HJ. MUSTAFA BIN MAMAT
Ketua
Jabatan Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Malaysia Terengganu
21030 Kuala Terengganu

PENGAKUAN

Saya mengakui Projek Ilmiah Tahun Akhir yang bertajuk Membandingkan penumpuan pengubahsuaian kaedah Newton bagi peringkat ketiga dan kelima adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

Tandatangan :..
Nama :Rajee a/ p Kerisnan
No. Matriks :UK 13106
Tarikh :07 Mei 2009

PENGHARGAAN

Saya ingin merakamkan ribuan terima kasih dan penghargaan ikhlas kepada penyelia Projek Ilmiah Tahun Akhir (PITA) saya, Prof. Dr. Haji Ismail Bin Mohd atas bimbingan dan dorongan yang diberi sepanjang tempoh projek penyelidikan ini.

Saya juga ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada ahli keluarga saya dan rakan-rakan yang telah membantu saya. Saya juga tujukan ribuan penghargaan kepada semua yang terlibat sama ada secara langsung atau tidak langsung membantu menjayakan projek penyelidikan ini.

Saya juga amat terhutang budi kepada Jabatan Matematik, kerana selama ini telah membantu saya dan yang lain-lain dalam menyiapkan laporan ini dengan menyediakan banyak kemudahan di makmal cermat dan al-safa.

Terima kasih sekali lagi kepada semua yang telah membantu saya menyiapkan laporan ini.

MEMBANDINGKAN PENUMPUAN PENGUBAHSUAIAN KAEDAH NEWTON BAGI PERINGKAT KETIGA DAN KELIMA

ABSTRAK

Kaedah Newton adalah salah satu cara yang digunakan untuk mendapatkan nilai punca. Ia merupakan persamaan yang menumpu secara kuadratik. Laporan ini adalah untuk mencadangkan perbaikan Kaedah Newton kepada yang lebih baik. Beberapa persamaan baru dibentuk daripada pengubahsuaian dan analisis penumpuan menunjukkan bahawa persamaan-persamaan yang terbentuk mempunyai peringkat penumpuan ketiga dan kelima. Menerusi aturcara C++, persamaan-persamaan ini terbukti kesahihannya. Ia mempunyai bilangan penilaian fungsi (BPF) dan bilangan lelaran yang lebih baik.

COMPARING THE MODIFICATION OF NEWTON METHOD BETWEEN ITS THIRD AND FIFTH ORDER CONVERGENCE

ABSTRACT

Newton method is one of the ways we use to find the root of a non-linear equation. It is a method which has a quadratic convergence. This report is to suggest the modification of Newton method to a better. Few new modified equations are obtained and convergence test shows that it has an order of third and fifth. Through C++, this new equations are proven its validity. It has better number of function evaluation and number of iteration.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

No. Jadual **Halaman**

SENARAI RAJAH

No. Rajah **Halaman**

SENARAI SINGKATAN

Singkatan

BPF	Bilangan Penilaian Fungsi
NK	Newton Klasik
KNA	Kaedah Newton Min Aritmetik
KNT	Kaedah Newton Min Titik-Tengah
KNH	Kaedah Newton Min Harmonik
KNHT	Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah
FNA	Fifth Newton Aritmetik
FNT	Fifth Newton Titik-Tengah
FNH	Fifth Newton Harmonik
FNHT	Fifth Newton Harmonik Titik-Tengah
FNA2	Fifth Newton Aritmetik Kedua
FNT2	Fifth Newton Titik-Tengah Kedua
FNH2	Fifth Newton Harmonik Kedua
FNHT2	Fifth Newton Titik-Tengah Kedua

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Pengenalan

Kaedah Newton telah dihuraikan oleh Isaac Newton dalam buku yang bertajuk *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (ditulis pada 1669, diterbitkan pada 1711 oleh William Jones) dan in *De metodis fluxionum et serierum infinitarum* (ditulis pada 1671, diterbitkan pada 1736 by John Colson). Pada masa itu, Isaac Newton hanya menggunakannya untuk menyelesaikan polinomial tetapi sekarang Kaedah Newton digunakan dalam banyak aplikasi dari segi sains dan matematik

Kaedah Newton merupakan salah satu algoritma yang paling baik dan digunakan dengan sangat meluas. Kaedah Newton adalah salah satu cara yang digunakan untuk mendapatkan punca kepada persamaan bukan linear dengan menggunakan fungsi serta pembezaannya. Puncanya menumpu secara kuadratik.

Pengubahsuaian kepada Kaedah Newton akan menghasilkan beberapa kaedah baru dengan penumpuan peringkat ketiga. Pengubahsuaian dibuat pada penambahan nilai pada pembezaan pertama, penambahan nilai pada fungsi atau perubahan pada nilai taksiran. Secara umumnya, apakah fungsi sebenar Kaedah Newton? Kaedah Newton digunakan untuk mencari nilai puncanya bagi persamaan bukan linear.

Menurut Weerakoon dan Fernando (2000), Kaedah Newton yang secara umumnya menumpu secara kuadratik diubahsuai untuk mendapatkan persamaan yang menumpu secara kubik iaitu Kaedah Newton Aritmetik, Kaedah Newton Titik-Tengah dan Kaedah Newton Harmonik. Pembezaan bagi kaedah Newton melibatkan kamiran tak tentu untuk membezakan fungsi dan anggaran kawasan berkaitan segiempat tepat. Di sini anggaran kamiran tak tentu dibuat dengan menggunakan petua trapezuim sebagai ganti bagi petua segiempat tepat dan keputusannya adalah penumpuan peringkat ketiga.

Analisis akan dibuat untuk Kaedah Newton Klasik (KNK), Kaedah Newton Min Arimetik (KNA), Kaedah Newton Min Titiktengah (KNT) dan Kaedah Newton Min Harmonik (KNH) mempunyai penumpuan peringkat ketiga. Kajian ini mencadangkan perbaikan lelaran pada Kaedah Newton.

Baru-baru ini, Jisheng Kou, Yitian Li dan Xiuhua Wang (2007), penulis jurnal 'Some modification of Newton's method with fifth order convergence' menyatakan bahawa Kaedah Newton ini boleh diubahsuaikan lagi untuk mendapatkan penumpuan peringkat kelima. Di sini, sekiranya pengubahsuaian dibuat dengan penambahan nilaian fungsi pada fungsi lelaran penumpuan peringkat ketiga, kaedah baru ini boleh dibuktikan mempunyai penumpuan peringkat kelima.

Analisis akan dibuat pada kaedah baru iaitu penumpuan peringkat. Kajian ini mencadangkan perbaikan lelaran bagi Kaedah Newton dan kaedah penumpuan peringkat ketiga. Ia juga mempunyai nilai indeks yang lebih efisien berbanding Kaedah Newton Klasik dan peringkat penumpuan ketiga.

1.2 Objektif Kajian

Objektif utama kajian ini adalah untuk membuktikan beberapa pengubahsuaian pada Kaedah Newton yang menghasilkan penumpuan peringkat kelima. Secara umumnya Kaedah Newton Klasik akan digunakan sebagai asas dalam pengubahsuaian beberapa kaedah baru.

1. Membandingkan bilangan penilaian fungsi (BPF) dan bilangan lelaran antara penumpuan peringkat ketiga dan kelima.
2. Membuktikan penumpuan peringkat kelima bagi persamaan yang terbentuk melalui pengubahsuaian Kaedah Newton.
3. Untuk menunjukkan adakah persamaan peringkat kelima lebih efisien daripada persamaan peringkat ketiga.

1.3 Skop Kajian

Skop kajian bagi projek ini adalah untuk mencari punca bagi persamaan bukan linear sahaja. Manakala persamaan linear tidak diambil kira kerana persamaan linear tidak memerlukan penggunaan formula. Hasil kajian ini adalah berkaitan dengan keefisienan indeks bagi persamaan peringkat kedua (Kaedah Newton), peringkat ketiga dan kelima, bilangan jumlah lelaran, kecekapan peringkat penumpuan dan nilai ralat.

BAB 2

SOROTAN KAJIAN

2.1 Pengenalan

Baru-baru ini Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2007) telah menjalankan kajian terhadap Kaedah Newton dan kaedah penumpuan peringkat ketiga untuk mendapatkan beberapa kaedah baru yang mempunyai kaedah penumpuan peringkat kelima.

2.2 Kaedah Newton

Menurut H.H.H Homeier (2003), kita perlulah mempertimbangkan kaedah lelaran untuk mendapatkan punca bagi persamaan bukan linear $f(x)=0$, untuk $f: D \subset \Re \rightarrow \Re$ dan D adalah selang terbuka, iaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.1}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Klasik yang digunakan bagi menyelesaikan punca bagi persamaan bukan linear. Beberapa pengubahsuaian kepada Kaedah Newton ini dengan penyelesaian penumpuan secara kubik telah dikembangkan. Antaranya pengubahsuaian pada fungsi Newton akan membentuk persamaan pengamiran fungsi teorem Newton.

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)\,dt \tag{2.2}$$

2.3 Kaedah Penumpuan Peringkat Ketiga

S. Weerakoon dan T.G.I. Fernando (2000) telah mengubahsuai Kaedah Klasik Newton dengan menggunakan petua trapezium, telah mendapat persamaan,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}) + f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,... \tag{2.3}$$

dengan x_{n+1} memerlukan lelaran yang ke $(n+1)$ pada bahagian kanan untuk dihitung. Jadi Kaedah Newton yang diubahsuai secara kubik diperoleh, iaitu,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x^{*}_{n+1}) + f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,... \tag{2.4}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Aritmetik, dengan nilai x^{*}_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Manakala A.Y.Özban pula mencadangkan penggunaan Petua Min Titik-Tengah untuk menghitung kamiran dalam persamaan (2.3) dan memperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^{*}_{n+1})\right)}, \qquad n = 0,1,... \tag{2.5}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Titik-Tengah, dengan nilai x^{*}_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Menurut A.Y.Özban lagi, penggunaan min harmonik menggantikan min aritmetik untuk mendapatkan persamaan yang lebih berkesan dan mempunyai penumpuan secara kubik.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^{*}_{n+1})}\right), \qquad n = 0,1,... \tag{2.6}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Harmonik, dengan nilai x^{*}_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan yang diperoleh dalam (2.4)-(2.6) merupakan kaedah yang diperoleh menerusi pengubahsuaian pada Kaedah Newton Klasik (2.1). Ketiga-tiga kaedah yang disebut ini mempunyai penumpuan peringkat ketiga. Persamaan (2.4) adalah Kaedah Newton Min Aritmetik (KNA). Persamaan (2.5) adalah Kaedah Newton Min Titik-Tengah (KNT). Manakala persamaan (2.6) adalah Kaedah Newton Min Harmonik (KNH).

2.4 Kaedah Penumpuan Peringkat Kelima

Menurut Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2007), persamaan yang diperoleh dalam (2.4)-(2.6) ini boleh diubahsuai untuk membentuk beberapa persamaan baru. Dan persamaan ini dibuktikan mempunyai penumpuan peringkat kelima.

Dengan menggunakan dua kelas baru dalam kaedah Newton, iaitu,

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.7}$$

dan,

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

kita boleh membentuk persamaan Newton baru yang mempunyai penumpuan peringkat kelima. Kedua-dua persamaan di atas akan digabungkan dengan persamaan (2.4)-(2.6) untuk membentuk enam persamaan penumpuan peringkat kelima.

Menurut Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2007), persamaan pertama yang boleh diperolehi adalah, sekiranya

$$u_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x^*_{n+1}) + f'(x_n)} \tag{2.4}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.7}$$

persamaan (2.4) iaitu Kaedah Newton Min Aritmetik digabungkan dengan persamaan (2.7) ia boleh membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x^*_{n+1}) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.9}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan kedua yang boleh diperolehi adalah sekiranya

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right)} \tag{2.5}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

persamaan (2.5) iaitu Kaedah Newton Min Titik-Tengah digabungkan dengan persamaan (2.8) ia boleh membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - f'(x_n)} \tag{2.10}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah, dengan nilai x_{n+1}^{*} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan ketiga yang boleh diperolehi adalah sekiranya

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_{n+1}^{*})}\right) \tag{2.6}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^{*})} \tag{2.7}$$

persamaan (2.6) iaitu Kaedah Newton Min Harmonik digabungkan dengan persamaan (2.7) untuk membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_{n+1}^{*})}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^{*})} \tag{2.11}$$

Persamaan ini disebut Kaedah Fifth Newton Min Harmonik, dengan nilai x_{n+1}^{*} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan keempat yang boleh diperolehi adalah sekiranya

$$u_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x^*_{n+1}) + f'(x_n)} \tag{2.4}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

persamaan (2.4) iaitu Kaedah Newton Min Aritmetik digabungkan dengan persamaan (2.8) ia boleh membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x^*_{n+1}) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.12}$$

Kita namakan persamaan yang terbentuk ini sebagai Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan kelima yang boleh diperolehi adalah sekiranya

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)} \tag{2.5}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.7}$$

persamaan (2.5) iaitu Kaedah Newton Min Titik-Tengah digabungkan dengan persamaan (2.7) ia boleh membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.13}$$

Kita namakan persamaan yang terbentuk ini sebagai Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan keenam yang boleh diperolehi adalah sekiranya

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) \tag{2.6}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

persamaan (2.6) iaitu Kaedah Newton Min Harmonik digabungkan dengan persamaan (2.8) untuk membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.14}$$

Kita namakan persamaan yang terbentuk ini sebagai Kaedah Fifth Newton Min HarmonikKedua, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan yang diperoleh dalam (2.9)-(2.14) merupakan penumpuan peringkat kelima. Persamaan (2.9) adalah Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik (FNA). Persamaan (2.10) adalah Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah (FNT). Persamaan (2.11) adalah Kaedah Fifth Newton Min Harmonik (FNH). Persamaan (2.12) adalah Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua (FNA2). Persamaan (2.13) adalah Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua (FNT2). Persamaan (2.14) adalah Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Kedua (FNH2).

Kajian akan dijalankan untuk membandingkan kecekapan persamaan penumpuan peringkat ketiga iaitu persamaan (2.4)-(2.6) dengan persamaan penumpuan peringkat kelima iaitu persamaan (2.9)-(2.14).

2.5 Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah dan Pengubahsuaiannya

Walaupun Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2007) tidak menyatakan tentang kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah, kita akan mengubahsuaiannya untuk mendapatkan persamaan peringkat kelima.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right), \quad n = 0,1,\ldots \quad (2.15)$$

Persamaan di atas ini diperolehi dengan mengantikan persamaan min harmonik dengan persamaan min titik-tengah. Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan ini akan kita mengubahsuainya dengan menggunakan persamaan kaedah baru Newton (2.7) dan (2.8).

Sekiranya kita mengabungkan keadah baru Newton dengan persamaan Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah, kita boleh memperoleh dua persamaan baru.

Persamaan pertama adalah:

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) \quad (2.15)$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \quad (2.8)$$

persamaan (2.15) iaitu Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah digabungkan dengan persamaan (2.8) ia boleh membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \quad (2.16)$$

Kita menamakan persamaan ini sebagai Fifth Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan kedua adalah:

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) \tag{2.15}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.7}$$

persamaan (2.15) iaitu Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah digabungkan dengan persamaan (2.8) ia boleh membentuk persamaan berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.17}$$

Kita menamakan persamaan ini sebagai Kaedah Fifth Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah Kedua dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus (2.1).

Persamaan yang diperolehi dalam (2.15) adalah persamaan peringkat ketiga. Persamaan (2.15) dikenali sebagai Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah(KNHT). Manakala persamaan yang diperolehi dalam (2.16) dan (2.17) merupakan persamaan baru, di mana kita akan menguji kedua-dua persamaan tersebut untuk mengetahui bahawa adakah ia juga merupakan persamaan peringkat kelima. Kita namakan persamaan (216) sebagai Fifth Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah (FNHT) dan persamaan (2.17) sebagai Fifth Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah Kedua (FNHT2).

BAB 3

METODOLOGI

3.1 Kaedah Dan Analisis Penumpuan

Di sini kita akan mengkaji pengubahsuaian pada kaedah-kaedah yang telah dinyatakan di atas. Kesemua kaedah-kaedah yang dinyatakan di atas ini akan dibuktikan kesahihannya menggunakan aturcara C++. Menerusi pembuktian ini kita dapat membandingkan kaedah-kaedah tersebut dan membuktikan kaedah mana yang mempunyai penumpuan peringkat kelima.

Dalam kajian ini, kita akan menggunakan beberapa kaedah iaitu Kaedah Newton Klasik, Kaedah Newton Aritmetik, Kaedah Newton Titik-Tengah, Kaedah Newton Harmonik dan beberapa kaedah peringkat kelima diterbitkan.

Kaedah Newton (atau juga dikenali sebagai Kaedah Newton-Raphson) merupakan salah satu cara yang amat terkenal dalam kaedah analisis berangka dalam penyelesaian punca bagi persamaan bukan linear. Terdapat pelbagai cara bagaimana hendak memperkenalkan Kaedah Newton ini.

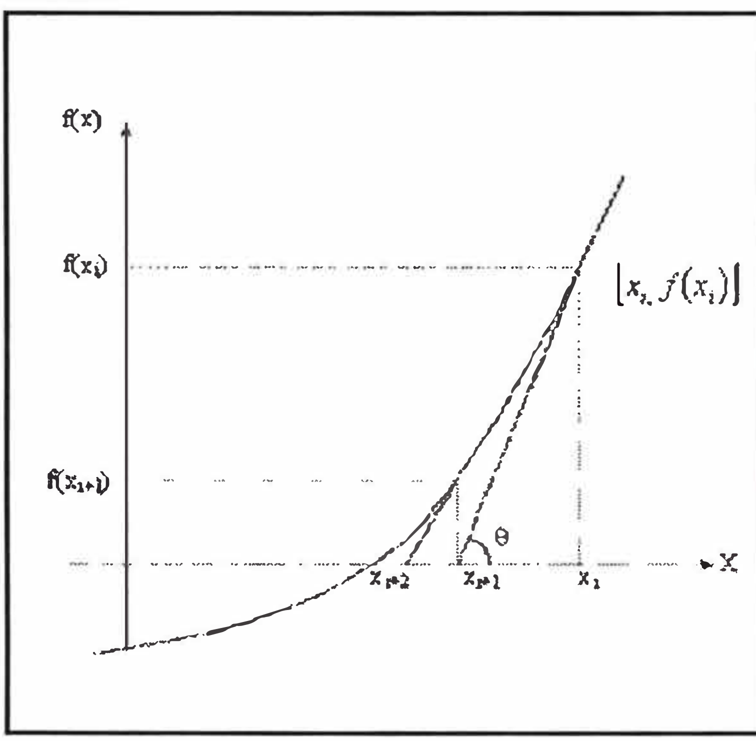
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3.1.1 Kaedah Newton Klasik (NK)

Cara pertama adalah dengan menggunakan teknik graf. Cara kedua adalah dengan menggunakan Siri Polinomial Taylor.

3.1.2 Teknik Graf

Berikut merupakan cara mendapatkan kaedah Newton dengan menggunakan teknik graf.



Rajah 3.1

Merujuk pada rajah 3.1 di atas kita uraikan persamaan Newton.

Dengan mengambil nilai x_i sebagai nilai anggaran pertama, dan mengambil nilai tangen graf $y = f(x)$ pada nilai koordinat $[x_i, f(x_i)]$. Manakala nilai x_{i+1} sebagai nilai seterusnya (nilai yang lebih baik berbanding x_i), dan mengambil nilai tangen graf $y = f(x)$ pada nilai koordinat$[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$. Dengan membuat cara tersebut, kita semakin menghampiri kepada nilai punca sesuatu persamaan bukan linear.

Menggunakan nilai x_i pada paksi-x dan $[x_i, f(x_i)]$ pada paksi-y, maka koordinat $(x, y) = [x_i, f(x_i)]$.

Dengan menggunakan formula

$$y = mX + c$$

$$y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$$

dengan nilai tangen memotong paksi-x, menggantikan nilai $y = 0$, kita peroleh,

$$0 - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

$$-f(x_i) = f'(x_i)x - f'(x_i)x_i$$

$$[f'(x_i)x_i - f(x_i) = f'(x_i)x] \div f'(x_i)$$

$$\frac{f'(x_i)x_i - f(x_i)}{f'(x_i)} = x$$

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \qquad f'(x_i) \neq 0$$

dengan membiarkan $x_{n+1} = x$ dan $x_n = x_i$, kita boleh dapatkan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iaitu persamaan diatas disebut Kaedah Newton.

3.1.3 Siri Polynomial Taylor

Berikut merupakan cara mendapatkan kaedah Newton dengan menggunakan Siri Polinomial Taylor.

Kita membuat beberapa andaian, iaitu

i. $p_0 \in [a, b]$ sebagai anggaran kepada penyelesaian p

ii. $f(p) = 0$

iii. $|p-p_0|$ mempunyai nilai yang kecil di mana nilai $(p-p_0)^2$ akan memberikan suatu nilai yang amat kecil sehingga boleh diabaikan.

Kita boleh menguaraikan $f(p)$ seperti berikut

$$f(p)=f(p_0)+(p-p_0)f'(p_0)+\frac{(p-p_0)^2}{2}f''(\xi(p)),$$

di mana $\xi(p)$ berada di antara p dan p_0. Oleh sebab beberapa andaian telah dibuat maka, persamaan ini memberikan

$$0=f(p_0)+(p-p_0)f'(p_0)+0$$

$$0=f(p_0)+(p-p_0)f'(p_0)$$

dengan menjadikan p sebagai tajuk,

$$-f(p_0)=(p-p_0)f'(p_0)$$

$$-f(p_0)=f'(p_0)p-f'(p_0)p_0$$

$$\left[f'(p_0)p_0-f(p_0)=f'(p_0)p\right]\div f'(p_0)$$

$$\frac{f'(p_0)p_0-f(p_0)=p}{f'(p_0)}$$

$$p=p_0-\frac{f(p_0)}{f'(p_0)}, \qquad f'(p_0)\neq 0$$

dengan membiarkan $x_{n+1}=p$ dan $x_n=p_0$, kita boleh dapatkan

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iaitu persamaan diatas disebut Kaedah Newton.

3.1.4 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan bagi setiap lelaran.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f(x_{n+1})$

Maka, Kaedah Newton ini memerlukan 2 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt{2} = 1.414$$

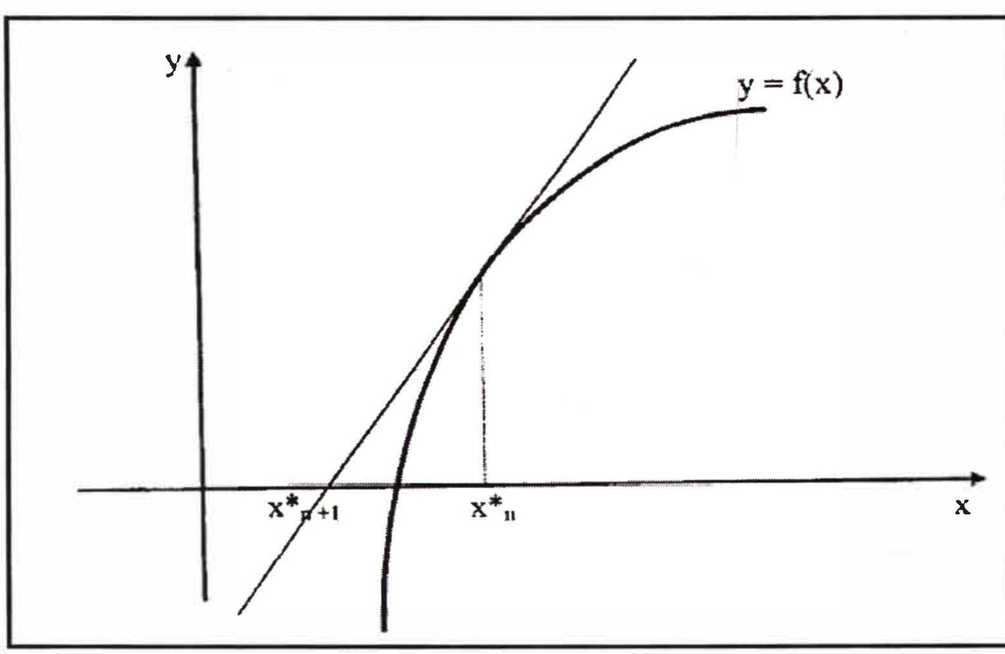
3.2 Kaedah Newton Min Aritmetik (KNA)

Secara umumnya beberapa pengubahsuaian telah dilakukan pada kaedah Newton untuk mendapatkan beberapa kaedah baru. Pengubahsuaian dijalankan dengan menggunakan petua trapezium, petua min titik tengah dan petua min harmonik.

Kaedah Newton Min Aritmetik ini boleh diperoleh dengan menggunakan petua trapezium ke dalam persamaan Newton Klasik.

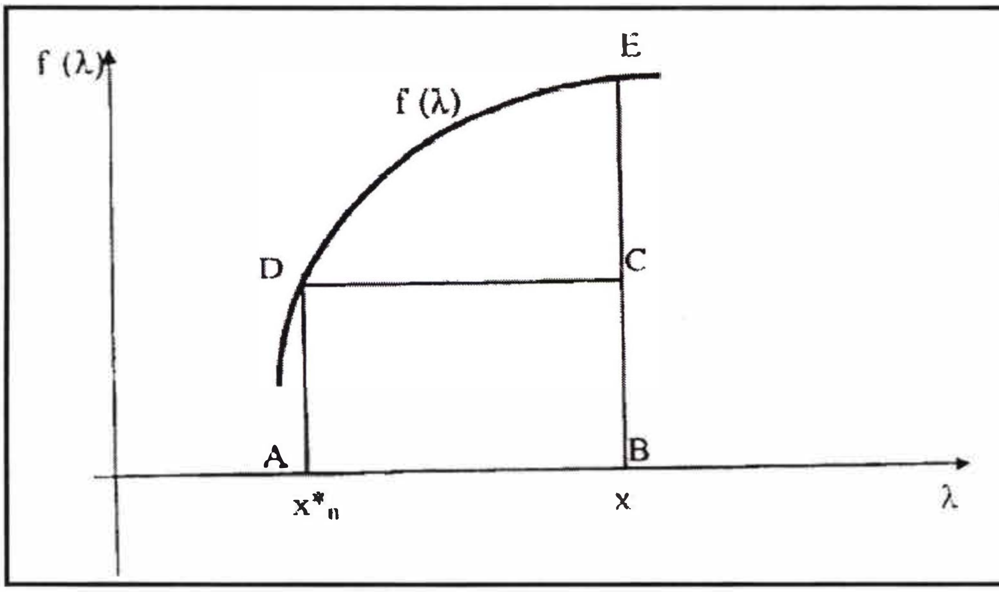
Katakan punca bagi persamaan bukan linear $f(x)=0$ adalah α, dimulakan dengan nilai anggaran x_0^* pada lelaran ke $(n+1)$, maka Kaedah Newton Klasik ini boleh diterjemahkan seperti ini berikut.

$$x_{n+1}^* = x_n^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Rajah 3.2

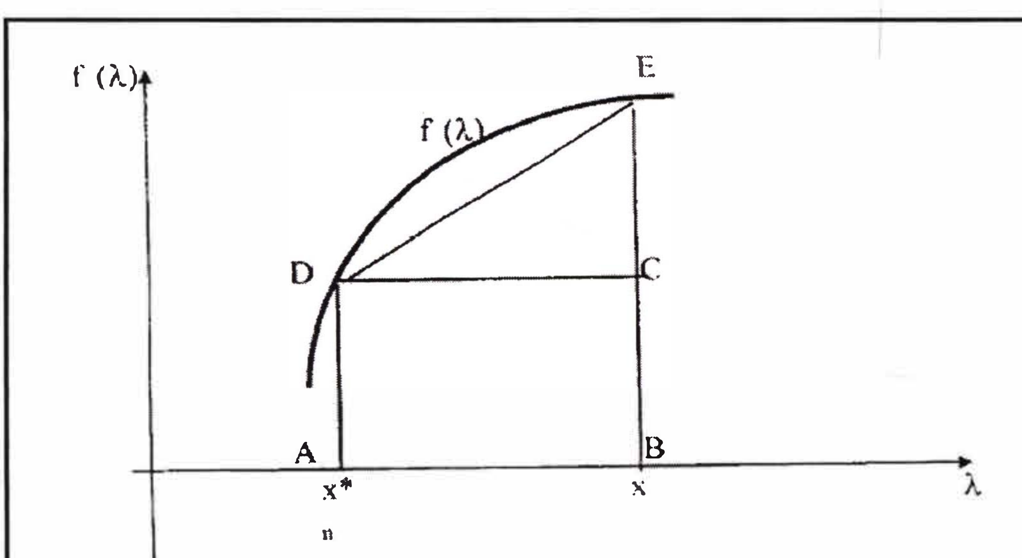
Merujuk pada rajah 3.2 di atas, kita boleh uraikan persamaan tangen bagi $y = f(x)$.



Rajah 3.3

Merujuk pada rajah 3.3 di atas, kita boleh uraikan persamaan tangen bagi $y = f(x)$. Persamaan tangen ini digunakan untuk memperoleh persamaan Newton. Persamaan tangen segiempat di atas ialah,

$$\int_{x_n^*}^{x} f'(\lambda)d\lambda = f'(x_n^*)(x - x_n^*).$$



Rajah 3.4

Menurut pada rajah 3.4 di atas, untuk memperoleh persamaan Newton Min Aritmetik, kita perlu mendapatkan nilai tangen bagi trapezium ABED pada persamaan bukan linear $y = f(x)$ pada titik x_n^* untuk mendapatkan punca pada x_{n+1}^*.

Merujuk pada rajah 3.3 di atas, dengan lebih terperinci lagi kita boleh uraikan persamaan tangen dengan menggunakan trapezium ABED pada titik x_n^*.

$$\int_{x_n^*}^{x} f'(\lambda)d\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)(x - x_n^*)[f'(x_n^*) + f'(x)]$$

Kita ubahsuai persamaan di atas pada titik x_n, maka persamaan yang terbentuk adalah

$$\int_{x_n}^{x} f'(\lambda)d\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)(x - x_n)[f'(x_n) + f'(x)]$$

Jadi, dengan menggunakan tangent trapezium ABED pada titik x_n, kita boleh peroleh satu persamaan baru. Masukkan persamaan yang diperolehi di atas ke dalam teorem Newton .

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(\lambda)d\lambda$$

$$M_n(x) = f(x_n) + \left(\frac{1}{2}\right)(x - x_n)[f'(x_n) + f'(x)]$$

Maka,

$$M_n(x_{n+1}) = f(x_n) + \left(\frac{1}{2}\right)(x_{n+1} - x_n)[f'(x_n) + f'(x_{n+1})]$$

dan gantikan nilai $M_n(x_{n+1}) = 0$

$$0 = f(x_n) + \left(\frac{1}{2}\right)(x_{n+1} - x_n)[f'(x_n) + f'(x_{n+1})]$$

$$\frac{-f(x_n)}{[f'(x_n) + f'(x_{n+1})]} = \left(\frac{1}{2}\right)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\frac{-2f(x_n)}{[f'(x_n) + f'(x_{n+1})]} = x_{n+1} - x_n$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{[f'(x_n) + f'(x_{n+1})]}$$

Dapatkan persamaan pada nilai lelaran $(n+1)$ dari persamaan diatas,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{\left[f'(x_n) + f'(x^*_{n+1})\right]}, \qquad n = 0,1,...$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Aritmetik, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus

$$x^*_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

3.2.1 Analisis Penumpuan

Biar α sebagai punca kepada $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$

dengan $x_n = \alpha + e_n$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f(x)$, kita peroleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)\, e_n + \frac{1}{2!} f^2(\alpha)\, e_n^2 + \frac{1}{3!} f^3(\alpha)\, e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f^2(\alpha)\, e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f^3(\alpha)\, e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (3.2.1)$$

dengan,

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'(x)$, kita peroleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha + e_n)$$

$$= f'(\alpha) + f^2(\alpha)\, e_n + \frac{1}{2!} f^3(\alpha)\, e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)\, e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^3(\alpha)\, e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] \tag{3.2.2}$$

(3.2.1) dibahagikan dengan (3.2.2), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\times\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\times$$

$$\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + 4c_2^2e_n^2 + \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - 2c_2e_n^2 + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^3 + c_2e_n^2 - 2c_2^2e_n^3 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.2.3}$$

Jadi, kita boleh dapatkan nilai $x_{n+1}^{*} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

$$x_{n+1}^{*} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \alpha + e_n - \left[e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= \alpha + c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.2.4}$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'(x_{n+1}^{*})$, kita peroleh

$$f'(x_{n+1}^{*}) = f'(\alpha) + \left[c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right]f^2(\alpha) + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[c_2e_n^e + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)}{2f'(\alpha)}\left[2c_2e_n^e + (4c_3 - 4c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[[1 + c_2 2c_2e_n^2 + c_2(4c_3 - 4c_2^2)e_n^3] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + c_2 2c_2e_n^2 + c_2(4c_3 - 4c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \tag{3.2.5}$$

Persamaan (3.2.2) ditambahkan dengan (3.2.5)

$$f'(x_n)+f'(x^{\bullet}_{n+1}) = f'(\alpha)\left[1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right]$$
$$+f'(\alpha)\left[1+2c_2^2e_n^2+4c_2(c_3-c_2^2)e_n^3+O(e_n^4)\right]$$
$$= f'(\alpha)\left[2+2c_2e_n+(2c_2^2+3c_3)e_n^2+4c_2(c_3-c_2^2)e_n^3+O(e_n^4)\right]$$
$$=2f'(\alpha)\left[1+c_2e_n+\left(c_2^2+\frac{3}{2}c_3\right)e_n^2+2c_2(c_3-c_2^2)e_n^3+O(e_n^4)\right]$$
$$=2f'(\alpha)\left[1+c_2e_n+\left(c_2^2+\frac{3}{2}c_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right] \tag{3.2.6}$$

Jadi, kita boleh peroleh selesaikan persamaan ralat bagi Kaedah Newton Min Aritmetik.

$$\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(x^{\bullet}_{n+1})} =$$
$$2f'(\alpha)\left[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right]\times$$
$$\left[2f'(\alpha)\left[1+c_2e_n+\left(c_2^2+\frac{3}{2}c_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right]\right]^{-1}$$
$$=\left[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right]\times$$
$$\left\{1-\left[c_2e_n+\left(c_2^2+\frac{3}{2}c_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right]+\left[c_2e_n+\left(c_2^2+\frac{3}{2}c_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right]^2-\dots\right\}$$
$$=\left[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right]\times\left\{1-\left[c_2e_n^2+\left(c_2^2+\frac{3}{2}c_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right]+c_2^2e_n^2+\dots\right\}$$
$$=\left[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right]\times\left[1-c_2e_n-\frac{3}{2}c_3e_n^2+O(e_n^3)\right]$$
$$=e_n-c_2e_n^2-\frac{3}{2}c_3e_n^3+c_2e_n^2-c_2^2e_n^3+c_3e_n^3+O(e_n^4)$$
$$=e_n-\left(c_2^2+\frac{1}{2}c_3\right)e_n^3+\Theta(e_n^4) \tag{3.2.7}$$

Gantikan $x_{n+1}=e_{n+1}+\alpha$, dan $x_n=e_n+\alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{(f'(x_n)+f'(x^{\bullet}_{n+1}))/2}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left[e_n - \left(c_2^2 + \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) \right]$$

$$e_{n+1} = \left(c_2^2 + \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.2.8)$$

Persamaan (3.2.8) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat ketiga.

3.2.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan bagi setiap lelaran.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{\left[f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*) \right]}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'(x_{n+1}^*)$

BPF 3 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Newton Min Aritmetik ini memerlukan 3 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$\sqrt[3]{3} = 1.442$

3.3 Kaedah Newton Min Titik Tengah (KNT)

Kaedah Newton Min Titik Tengah ini boleh diperoleh dengan menggunakan kamiran petua min titik tengah ke dalam teorem Newton.

Menggunakan teorem Newton,

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)dt$$

dan kamiran petua titik tengah iaitu

$$\int_{x_n}^{x} f'(t)dt = (\alpha - x_n) f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)$$

dengan

$$\alpha = x_{n+1}$$

Gantikan persamaan ini dalam teorem Newton, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (\alpha - x_n) f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)$$

$$f(x) = 0$$

$$0 = f(x_n) + (\alpha - x_n) f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)$$

$$-f(x_n) = (\alpha - x_n) f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)$$

$$\frac{-f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)} = \alpha - x_n$$

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)}$$

dengan menggantikan $\alpha = x_{n+1}$ ke dalam persamaan di atas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n + \alpha}{2}\right)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})\right)}$$

Maka, nilai lelaran ke $(n+1)$ ialah,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)}, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Titik-Tengah, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus

$$x^*_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

3.3.1 Analisis Penumpuan

Biar α punca kepada $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$

dengan $x_n = \alpha + e_n$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f(x)$, kita peroleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^2(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^3(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f^2(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f^3(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (3.3.1)$$

dengan,

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f^{'}(x)$, kita peroleh

$$f^{'}(x_n) = f^{'}(\alpha + e_n)$$

$$= f^{'}(\alpha) + f^{2}(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^{3}(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f^{'}(\alpha)\left[1 + \frac{f^{2}(\alpha)e_n}{f^{'}(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{3}(\alpha)e_n^3}{f^{'}(\alpha)} + O(e_n^3)\right]$$

$$= f^{'}(\alpha)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] \tag{3.3.2}$$

(3.3.1) dibahagikan dengan (3.3.2), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + 4c_2^2e_n^2 + \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - 2c_2e_n^2 + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^3 + c_2e_n^2 - 2c_2^2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.3.3}$$

Jadi, kita boleh dapatkan nilai $x_{n+1}^{*} = x_n - f(x_n)/f^{'}(x_n)$

$$x_{n+1}^{*} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$= \alpha + e_n - \left[e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= \alpha + c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.3.4}$$

Nilai $\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{*}\right)$ dihitung menggunakan persamaan –persamaan di atas.

$$\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{*}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + e_n + \alpha + c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$= \alpha + \frac{e_n}{2} + \frac{1}{2}\left(c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right) + O(e_n^4) \tag{3.3.5}$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right)$, kita peroleh

$$f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) = f'(\alpha)\left[1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] \quad (3.3.6)$$

(3.3.1) dibahagikan dengan (3.3.6), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right)} =$$

$$f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left[f'(\alpha)\left[1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times$$

$$\left\{1 - \left[c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - \left[c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] + c_2^2 e_n^2 + \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - c_2 e_n - \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + c_2^2 e_n^3 + O(e_n^3)\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - c_2 e_n - c_2^2 e_n^2 - \frac{3}{4}c_3 e_n^2 + c_2^2 e_n^3 + O(e_n^3)\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - c_2 e_n - \frac{3}{4}c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right\}$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 - \frac{3}{4}c_3 e_n^3 + c_2 e_n^2 - c_2^2 e_n^3 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n + \frac{1}{4}c_3 e_n^3 - c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - \left(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \quad (3.3.7)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x^{*}_{n+1}) + f'(x_n)}$$

$$e_{n+1}+\alpha=e_n+\alpha-\left(e_n-\left(c_2^2-\frac{1}{4}c_3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right)$$

$$e_{n+1}=\left(c_2^2-\frac{1}{4}c_3\right)e_n^3+O(e_n^4) \tag{3.3.8}$$

Persamaan (3.3.8) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat ketiga.

3.3.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan bagi setiap lelaran.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n+x_{n+1}^*\right)\right)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'\left(\frac{1}{2}(x_n+x_{n+1}^*)\right)$

BPF 3 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Newton Min Titik-Tengah ini memerlukan 3 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[3]{3}=1.442$$

3.4 Kaedah Newton Min Harmonik (KNH)

Kaedah Newton Min Harmonik ini boleh diperoleh dengan menggunakan petua min harmonik ke dalam persamaan Kaedah Newton Aritmetik.

Menggunakan kaedah Newton Aritmetik iaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{[f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)]}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{[f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)]/2}$$

dengan

$$x_{n+1}^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Sekiranya kita menggantikan persamaan min harmonik, ke dalam persamaan di atas dan kita boleh peroleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(x_{n+1})\right)}{2f'(x_n)f'(x_{n+1}^*)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)}{2f'(x_n)f'(x_{n+1}^*)}$$

Persamaan di atas boleh diatur semula menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_{n+1}^*)}\right)$$

dengan,

$$x_{n+1}^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3.4.1 Analisis Penumpuan

Biar α punca kepada $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$

dengan $x_n = \alpha + e_n$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f(x)$, kita peroleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^2(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^3(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f^2(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f^3(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \tag{3.4.1}$$

dengan,

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'(x)$, kita peroleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha + e_n)$$

$$= f'(\alpha) + f^2(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^3(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^3(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] \tag{3.4.2}$$

(3.4.1) dibahagikan dengan (3.4.2), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\times$$
$$\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + 4c_2^2e_n^2 + \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - 2c_2e_n^2 + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^3 + c_2e_n^2 - 2c_2^2e_n^3 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.4.3}$$

Jadi, kita boleh dapatkan nilai $x^{*}_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

$$x^{*}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \alpha + e_n - \left[e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.4.4)$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'(x^{*}_{n+1})$, kita peroleh

$$f'(x^{*}_{n+1}) = f'(\alpha) + \left[c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right]f^2(\alpha) + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[c_2 e_n^e + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)}{2f'(\alpha)}\left[2c_2 e_n^e + (4c_3 - 4c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[[1 + c_2 2c_2 e_n^2 + c_2(4c_3 - 4c_2^2)e_n^3] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + c_2 2c_2 e_n^2 + c_2(4c_3 - 4c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (3.4.5)$$

(3.4.2) didarapkan dengan (3.4.5), kita boleh peroleh

$$f'(x_n)f'(x^{*}_{n+1}) =$$

$$f'(\alpha)\left[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right] \times f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= \left[f'(\alpha) + f'(\alpha)2c_2 e_n + f'(\alpha)3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$\times \left[f'(\alpha) + f'(\alpha)2c_2^2 e_n^2 + f'(\alpha)4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= (f'(\alpha))^2 + (f'(\alpha))^2 2c_2^2 e_n^2 + (f'(\alpha))^2 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3$$

$$+ (f'(\alpha))^2 2c_2 e_n + (f'(\alpha))^2 4c_2 c_2^2 e_n^3 + (f'(\alpha))^2 3c_3 e_n^2 + O(e_n^4)$$

$$= (f'(\alpha))^2\left[1 + 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + 4(c_2 c_3 + c_4)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (3.4.6)$$

(3.4.2) ditambahkan dengan (3.4.5), kita boleh peroleh

$$f'(x_n) + f'(x^{*}_{n+1}) =$$

$$f'(\alpha)\left[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right] + f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[2 + 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= 2f'(\alpha)\left[1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + 2c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= 2f'(\alpha)\left[1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] \tag{3.4.7}$$

(3.4.1) didarapkan dengan (3.4.7), kita boleh peroleh

$$f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)\right) =$$

$$f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left[2f'(\alpha)\left(1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right)\right]$$

$$= \left[f'(\alpha)e_n + f'(\alpha)c_2 e_n^2 + f'(\alpha)c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\times\left[2f'(\alpha) + 2f'(\alpha)c_2 e_n + 2f'(\alpha)\left(c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= 2\left(f'(\alpha)\right)^2 e_n + 2\left(f'(\alpha)\right)^2 c_2 e_n^2 + 2\left(f'(\alpha)\right)^2\left(c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^3$$

$$+ 2\left(f'(\alpha)\right)^2 c_2 e_n^2 + 2\left(f'(\alpha)\right)^2 c_2^2 e_n^3 + 2\left(f'(\alpha)\right)^2 c_3 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= \left(2f'(\alpha)\right)^2\left[e_n + 2c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \tag{3.4.8}$$

(3.4.6) didarapkan dengan 2, kita boleh peroleh

$$2\left(f'(x_n)f'(x_{n+1}^*)\right) =$$

$$2 \times \left[\left(f'(\alpha)\right)^2\left(1 + 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + 4(c_2 c_3 + c_4)e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right] \tag{3.4.9}$$

(3.4.8) dibahagikan dengan (3.4.9), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)\right)}{2\left(f'(x_n)f'(x_{n+1}^*)\right)} =$$

$$\left(2f'(\alpha)\right)^2\left[e_n + 2c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times$$

$$\left[2\left(f'(\alpha)\right)^2 \times \left[1 + 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + 4(c_2 c_3 + c_4)e_n^3 + O(e_n^4)\right]\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + 2c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\times\left[1 + 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + 4c_2 c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]^{-1}$$

$$=\left[e_n + 2c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}1-\left[2c_2e_n + (2c_2^2+3c_3)e_n^2 + 4c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \\ +\left[2c_2e_n + (2c_2^2+3c_3)e_n^2 + 4c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]^2 - \ldots\end{array}\right\}$$

$$=\left[e_n + 2c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\times\left[1-\left[2c_2e_n + (2c_2^2+3c_3)e_n^2 + 4c_2c_3e_n^3\right] + 4c_2^2e_n^2 + O(e_n^4) + \ldots\right]$$

$$=\left[e_n + 2c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\times\left[1-2c_2e_n - (2c_2^2+3c_3)e_n^2 - 4c_2c_3e_n^3 + 4c_2^2e_n^2 + O(e_n^4)\right]$$

$$=\left[e_n + 2c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\times\left[1-2c_2e_n + (3c_3 + 2c_2^2)e_n^2 - 4c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= e_n - 2c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 3c_3)e_n^3 - 4c_2c_3e_n^4 + 2c_2e_n^2 + 4c_2^2e_n^3 +$$

$$\left(2c_2^2 + \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - 3c_3e_n^3 + \frac{5}{2}c_3e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - \frac{1}{2}c_3e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.4.10)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n) + f'(x_{n+1}^{*})\right)}{2f'(x_n)f'(x_{n+1}^{*})}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left(e_n - \frac{1}{2}c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_3e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.4.11)$$

Persamaan (3.4.11) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat ketiga.

3.4.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan bagi setiap lelaran.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^{*}_{n+1})}\right)$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'(x^{*}_{n+1})$

BPF 3 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Newton Min Harmonik ini memerlukan 3 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[3]{3} = 1.442$$

3.5 Persamaan Kelas Baru Newton

Secara umumnya beberapa pengubahsuaian telah dilakukan pada kaedah Newton untuk mendapatkan beberapa kaedah baru. Pengubahsuaian dibuat dengan menggunakan dua kelas baru dalam kaedah Newton.

Secara umumnya kita mengambil kaedah penumpuan peringkat ketiga sebagai,

$$u_{n+1} = g_3(x_n)$$

Kita mempertimbangkan perhitungan kamiran bagi selang terbuka baru hasil daripada teorem Newton sebagai,

$$f(x) = f(u_{n+1}) + \int_{u_{n+1}}^{x} f'(t)dt$$

Persamaan di atas diubahsuai dengan menggunakan petua segiempat.

$$f(x) = f(u_{n+1}) + \int_{u_{n+1}}^{x} f'(t)dt$$

$$\int_{u_{n+1}}^{x} f'(t)dt \approx f'(u_{n+1})(\alpha - u_{n+1})$$

$$f(x) = f(u_{n+1}) + f'(u_{n+1})(\alpha - u_{n+1})$$

$$0 \approx f(u_{n+1}) + f'(u_{n+1})(\alpha - u_{n+1})$$

$$\alpha = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(u_{n+1})}$$

$$\alpha = x_{n+1}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(u_{n+1})}$$

Sama seperti cara yang kita gunakan untuk mengubahsuai Kaedah Newton, kita gunakan $f'(u_{n+1})$ dengan $f'(x^{*}_{n+1})$, di mana $x^{*}_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ sebagai lelaran baru Newton.

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^{*}_{n+1})} \tag{2.7}$$

Maka persamaan di atas dikenali sebagai kelas baru pertama, dengan nilai x_{n+1}^{*} dikira menggunakan rumus

$$x_{n+1}^{*} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Menggunakan siri Polinomial Taylor, kita peroleh

$$f'(x_{n+1}^{*}) \cong f'(x_n) + f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n) \tag{3.5.1}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) \cong f'(x_n) + \frac{1}{2}f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n) \tag{3.5.2}$$

(3.5.1) dan (3.5.2) digunakan untuk menghitung $f'(x_{n+1}^{*})$.

$$f'(x_n) = f'(x_{n+1}^{*}) - f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)$$

$$f'(x_n) = f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - \frac{1}{2}f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)$$

$$f'(x_{n+1}^{*}) - f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n) = f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - \frac{1}{2}f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)$$

$$f'(x_{n+1}^{*}) = f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - \frac{1}{2}f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n) + f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)$$

$$\left[f'(x_{n+1}^{*}) = f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - \frac{1}{2}f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n) + f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)\right] \times 2$$

$$2f'(x_{n+1}^{*}) = 2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n) + 2f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)$$

$$2f'(x_{n+1}^{*}) = 2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) + f^2(x_n)(x_{n+1}^{*} - x_n)$$

$$2f'(x_{n+1}^{*}) = 2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) + f'(x_{n+1}^{*}) - f'(x_n)$$

$$f'(x_{n+1}^{*}) = 2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})\right) - f'(x_n)$$

$$f'(x_{n+1}^{*}) \cong 2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - f'(x_n) \tag{3.5.3}$$

Persamaan (3.5.3) digantikan dalam persamaan kelas baru pertama (2.8),

$$f'(x_{n+1}^{*}) \cong 2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^{*})\right) - f'(x_n) \tag{3.5.3}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \qquad (2.7)$$

untuk mendapatkan kelas baru kedua.

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \qquad (2.8)$$

Persamaan ini disebut kelas baru kedua, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus

$x^*_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

3.5.1 Analisis Penumpuan

Pembuktian: Persamaan ralat bagi persamaan kelas baru pertama (2.7).

Nilai u_{n+1} dianggap sebagai,

$$u_{n+1} - \alpha = Ae_n^3 + O(e_n^4),$$

Menggunakan siri Polinomial Taylor dan anggap $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$ kita memperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^2(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^3(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f^2(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f^3(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)] \qquad (3.5.1)$$

dengan

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad j = 2,3,\ldots.$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'(x)$, kita peroleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha + e_n)$$

$$= f'(\alpha) + f^2(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^3(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^3(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)\right]$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)] \qquad (3.5.2)$$

(3.5.1) dibahagikan dengan (3.5.2), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times$$
$$\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + 4c_2^2e_n^2 + \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - 2c_2e_n^2 + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^3 + c_2e_n^2 - 2c_2^2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

Jadi, kita boleh dapatkan nilai $x_{n+1}^{*} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

$$x_{n+1}^{*} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \alpha + e_n - \left[e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= \alpha + c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.5.3)$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'(x_{n+1}^{*})$, kita peroleh

$$f'(x_{n+1}^{*}) = f'(\alpha) + \left[c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right]f^2(\alpha) + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[c_2e_n^e + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)}{2f'(\alpha)}\left[2c_2e_n^e + (4c_3 - 4c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[[1 + c_2 2c_2e_n^2 + c_2(4c_3 - 4c_2^2)e_n^3] + O(e_n^4)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + c_2 2c_2e_n^2 + c_2(4c_3 - 4c_2^2)e_n^3\right] + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \tag{3.5.4}$$

Siri Polinomial Taylor bagi $f(u_{n+1})$ adalah

$$f(u_{n+1}) = f'(\alpha)\left[(u_{n+1} - \alpha) + O((u_{n+1} - \alpha)^2)\right] \tag{3.5.5}$$

(3.5.5) dibahagikan dengan (3.5.4), kita boleh peroleh

$$\frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)} =$$

$$f'(\alpha)\left[(u_{n+1} - \alpha) + O((u_{n+1} - \alpha)^2)\right] \times$$

$$\left[f'(\alpha)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]\right]^{-1}$$

$$= \left[(u_{n+1} - \alpha) + O((u_{n+1} - \alpha)^2)\right]$$

$$\times\left\{1 - \left[2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right] + \left[2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right]^2\right\}$$

$$= (u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6) \tag{3.5.6}$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = u_{n+1} - [(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)]$$

$$e_{n+1} = u_{n+1} - \alpha - [(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)]$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 A e_n^5 + O(e_n^6) \tag{3.5.7}$$

Persamaan (3.5.7) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat kelima.

3.5.2 Analisis Penumpuan

Pembuktian: Persamaan ralat bagi persamaan kelas baru kedua (2.8).

Dengan menyamakan persamaan kelas baru pertama (2.7) dan kedua (2.8), kita dapat buktikan persamaan kelas kedua mempunyai persamaaan ralat yang sama dengan kelas baru pertama.

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \tag{2.7}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

$$u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)}$$

$$\frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} = \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)}$$

Disebabkan kita berjaya buktikan persamaan kelas baru pertama sama dengan kelas baru kedua maka kedua-dua persamaan mempunyai persamaan ralat yang sama.

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = u_{n+1} - [(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)]$$

$$e_{n+1} = u_{n+1} - \alpha - [(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)]$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 A e_n^5 + O(e_n^6) \tag{3.5.8}$$

Persamaan (3.5.8) membuktikan ia sama dengan persamaan (3.5.7). Maka ia adalah persamaan penumpuan peringkat kelima.

3.6 Fifth Newton Min Aritmetik (FNA)

Terdapat lapan persamaan baru hasil daripada gabungan persamaan peringkat ketiga dan kelas baru pertama dan kedua.

Fifth Newton Min Aritmetik adalah gabungan persamaan Newton Min Aritmetik dan kelas baru pertama.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^{*}) + f'(x_n)} \tag{2.4}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^{*})} \tag{2.7}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^{*}) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^{*})} \tag{2.9}$$

3.6.1 Analisis Penumpuan

Menggunakan persamaan ralat bagi persamaan (2.4) dan (2.7) untuk mendapatkan persamaan ralat bagi (2.10),

$$e_{n+1} = \left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.2.8}$$

$$(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6) \tag{3.5.6}$$

Menggantikan (3.2.8) dan (3.5.6) ke dalam (2.9), kita boleh peroleh

$$\frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^{*}) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^{*})} =$$

$$\left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - \left[(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)\right]$$

$$= \left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - (u_{n+1} - \alpha) + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= \left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - \left[\left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right] + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= \left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - \left(c_2^2 + \frac{1}{2}c_3\right)e_n^3 - O(e_n^4) + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 \left[\left(c_2^2 + \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) \right] + e_n + O(e_n^6)$$

$$= c_2^2 (2c_2^2 + c_3) e_n^5 + e_n + O(e_n^6)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^*) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left[c_2^2 (2c_2^2 + c_3) e_n^5 + e_n + O(e_n^6) \right]$$

$$e_{n+1} = c_2^2 (2c_2^2 + c_3) e_n^5 + O(e_n^6) \tag{3.6.1}$$

Persamaan (3.6.1) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat kelima.

3.6.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^*) + f'(x_n)} \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'(x_{n+1}^*)$

BPF 3 = $f(u_{n+1})$

BPF 4 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Fifth Newton Min Aritmetik ini memerlukan 4 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[4]{5} = 1.495$$

3.7 Fifth Newton Min Titik-Tengah (FNT)

Fifth Newton Min Titik-Tengah adalah gabungan persamaan Newton Min Titik-Tengah dan kelas baru kedua.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)} \tag{2.5}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.10}$$

3.7.1 Analisis Penumpuan

Menggunakan persamaan ralat bagi persamaan (2.5) dan (2.8) untuk mendapatkan persamaan ralat bagi (2.10),

$$e_{n+1} = \left(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.3.8}$$

$$(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6) \tag{3.5.6}$$

Menggantikan (3.3.8) dan (3.5.6) ke dalam (2.10), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} =$$

$$\left(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - \left[(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)\right]$$

$$= \left(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - (u_{n+1} - \alpha) + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= \left(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) - \left[\left(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right] + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 \left[\left(c_2^2 - \frac{1}{4} c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) \right] + e_n + O(e_n^6)$$

$$= c_2^2 e_n^2 \left(2c_2^2 - \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^5 + e_n + O(e_n^6)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left[c_2^2 e_n^2 \left(2c_2^2 - \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^5 + e_n + O(e_n^6) \right]$$

$$e_{n+1} = c_2^2 e_n^2 \left(2c_2^2 - \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^5 + O(e_n^6) \qquad (3.7.1)$$

Persamaan (3.7.1) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat kelima.

3.7.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right)$

BPF 3 = $f(u_{n+1})$

BPF 4 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Fifth Newton Min Titik-Tengah ini memerlukan 4 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[4]{5} = 1.495$$

3.8 Fifth Newton Min Harmonik (FNH)

Fifth Newton Min Harmonik adalah gabungan persamaan Newton Min Harmonik dan kelas baru pertama.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) \quad (2.6)$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \quad (2.7)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \quad (2.11)$$

3.8.1 Analisis Penumpuan

Menggunakan persamaan ralat bagi persamaan (2.6) dan (2.7) untuk mendapatkan persamaan ralat bagi (2.11),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \quad (3.4.11)$$

$$(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6) \quad (3.5.6)$$

Menggantikan (3.4.11) dan (3.5.6) ke dalam (2.11), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} =$$

$$\frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) - \left[(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) - (u_{n+1} - \alpha) + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) - \left[\frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) - \frac{1}{2}c_3 e_n^3 - O(e_n^4) + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2 e_n^2 \left[\frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] + e_n + O(e_n^6)$$

$$= c_2^2 c_3 e_n^5 + e_n + O(e_n^6)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_{n+1}^*)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left[c_2^2 c_3 e_n^5 + e_n + O(e_n^6)\right]$$

$$e_{n+1} = c_2^2 c_3 e_n^5 + O(e_n^6) \qquad (3.8.1)$$

Persamaan (3.8.1) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat kelima.

3.8.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x_{n+1}^*)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'(x_{n+1}^*)$

BPF 3 = $f(u_{n+1})$

BPF 4 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Fifth Newton Min Harmonik ini memerlukan 4 BPF sahaja.
Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[4]{5} = 1.495$$

3.9 Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua (FNA2)

Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua ini sama seperti Fifth Newton Arithmetik, di mana kita hanya menukarkan gabungan persamaan Newton Min Aritmetik dan kelas baru pertama kepada gabungan antara persamaan Newton Min Aritmetik dan kelas baru kedua.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^*) + f'(x_n)} \tag{2.4}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^*) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)} \tag{2.12}$$

3.9.1 Analisis Penumpuan

Oleh sebab persamaan ralat bagi kedua-dua persamaan kelas baru newton (2.7) dan (2.8) adalah sama, maka kita dengan senangnya boleh kaitkan persamaan Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua mempunyai persamaan ralat seperti Fifth Newton Arithmetik.

$$e_{n+1} = c_2^2(2c_2^2 + c_3)e_n^5 + O(e_n^6) \tag{3.6.1}$$

3.9.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^*) + f'(x_n)} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 3 = $f'(x^{*}_{n+1})$

BPF 3 = $f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^{*}_{n+1})\right)$

BPF 4 = $f(u_{n+1})$

BPF 5 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua ini memerlukan 5 BPF.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[5]{5} = 1.380$$

3.10 Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua (FNT2)

Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua ini sama seperti Fifth Newton Min Titik-Tengah, di mana kita hanya menukarkan gabungan persamaan Newton Min Titik-Tengah dan kelas baru kedua kepada gabungan antara persamaan Newton Min Titik-Tengah dan kelas baru pertama.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right)} \tag{2.5}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)} \tag{2.7}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)} \tag{2.13}$$

3.10.1 Analisis Penumpuan

Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua mempunyai persamaan ralat seperti Fifth Newton Min Titik-Tengah.

$$e_{n+1} = c_2^2 e_n^2 \left(2c_2^2 - \frac{1}{2}c_3\right) e_n^5 + O(e_n^6) \tag{3.7.1}$$

3.10.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right)} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 3 = $f'(x_{n+1}^*)$

BPF 3 = $f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^{*}_{n+1})\right)$

BPF 4 = $f(u_{n+1})$

BPF 5 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua ini memerlukan 5 BPF.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[5]{5} = 1.380$$

3.11 Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Kedua (FNH2)

Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Kedua ini sama seperti Fifth Newton Min Harmonik, di mana kita hanya menukarkan gabungan persamaan Fifth Newton Min Harmonik dan kelas baru pertama kepada persamaan Fifth Newton Min Harmonik dan kelas baru kedua.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) \tag{2.6}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.14}$$

3.11.1 Analisis Penumpuan

Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Kedua mempunyai persamaan ralat seperti Fifth Newton Min Harmonik.

$$e_{n+1} = c_2^2 c_3 e_n^3 + O(e_n^6) \tag{3.8.1}$$

3.11.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right) - f'(x_n)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 3 = $f'(x^*_{n+1})$

$$\text{BPF } 3 = f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^*_{n+1})\right)$$

$$\text{BPF } 4 = f(u_{n+1})$$

$$\text{BPF } 5 = f(x_{n+1})$$

Maka, persamaan Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Kedua ini memerlukan 5 BPF.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[5]{5} = 1.380$$

3.12 Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah (KNHT)

Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah ini boleh diperoleh dengan mengantikan petua min harmonik kepada petua min titik-tengah dalam persamaan Kaedah Newton Min Harmonik.

Menggunakan kaedah Newton Min Harmonik,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right)$$

dengan

$$x^*_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

kita mengantikan persamaan min titik-tengah pada persamaan min harmonik.

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} + \frac{f(x_n)}{4f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - 2f'(x_n)}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^*_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right)$$

Persamaan ini disebut Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah, dengan nilai x^*_{n+1} dikira menggunakan rumus

$$x^*_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

3.12.1 Analisis Penumpuan

Biar α punca kepada $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$

dengan $x_n = \alpha + e_n$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f(x)$, kita boleh peroleh

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n)$$

$$= f(\alpha) + f^{'}(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^2(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^3(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f^{'}(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f^2(\alpha)e_n^2}{f^{'}(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f^3(\alpha)e_n^3}{f^{'}(\alpha)} + O(e_n^4)\right]$$

$$= f^{'}(\alpha)\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (3.12.1)$$

dengan,

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f^{'}(\alpha)}$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f^{'}(x)$, kita boleh peroleh

$$f^{'}(x_n) = f^{'}(\alpha + e_n)$$

$$= f^{'}(\alpha) + f^2(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f^3(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f^{'}(\alpha)\left[1 + \frac{f^2(\alpha)e_n}{f^{'}(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^3(\alpha)e_n^3}{f^{'}(\alpha)} + O(e_n^3)\right]$$

$$= f^{'}(\alpha)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] \qquad (3.12.2)$$

(3.4.1) dibahagikan dengan (3.4.2), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} = \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left\{1 - \left[2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right] + 4c_2^2e_n^2 + \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - 2c_2e_n^2 + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^3 + c_2e_n^2 - 2c_2^2e_n^3 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.12.3)$$

Jadi, kita boleh dapatkan nilai $x_{n+1}^{*} = x_n - f(x_n)/f^{'}(x_n)$

$$x_{n+1}^{*} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$= \alpha + e_n - \left[e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$= \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.12.4)$$

Nilai $\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right)$ dihitung menggunakan persamaan –persamaan di atas.

$$\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + e_n + \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$= \alpha + \frac{e_n}{2} + \frac{1}{2}\left(c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3\right) + O(e_n^4) \qquad (3.12.5)$$

Menggunakan siri polinomial Taylor pada $f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right)\right)$, kita boleh peroleh

$$f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right)\right) = f'(\alpha)\left[1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{4}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] \qquad (3.12.6)$$

(3.12.6) didarabkan dengan 2, kita boleh peroleh

$$2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right)\right) = f'(\alpha)\left[2 + 2c_2 e_n + \left(2c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] \qquad (3.12.7)$$

(3.12.7) ditolak dengan (3.12.2), boleh kita peroleh

$$2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right)\right) - f'(x_n) =$$

$$f'(\alpha)\left[2 + 2c_2 e_n + \left(2c_2^2 + \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] - f'(\alpha)\left[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= f'(\alpha)\left[1 + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] \qquad (3.12.8)$$

(3.12.1) dibahagikan dengan (3.12.8), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^{\bullet}\right)\right) - f'(x_n)} =$$

$$f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left[f'(\alpha)\left[1 + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right] \times \left[1 + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$\left\{1 - \left[\left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right] + \left[\left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 - \ldots\right\}$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= \left[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - 2c_2^2 e_n^2 + \frac{3}{2}c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right]$$

$$= e_n - 2c_2^2 e_n^3 + \frac{3}{2}c_3 e_n^3 + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3$$

$$= e_n + c_2 e_n^2 - \left(2c_2^2 - \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.12.9)$$

Masukkan nilai yang diperolehi ke dalam persamaan Newton Min Harmonik Titik-Tengah,

$$-\frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right) - f'(x_n)} =$$

$$-\frac{1}{2}e_n + c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) - \left(\frac{1}{2}e_n + c_2 e_n^2 - \left(2c_2^2 - \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e_n + c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) - \frac{1}{2}e_n - c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 - \frac{5}{2}c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= -e_n + c_3 e_n^3 - \frac{5}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= -e_n - \frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (3.12.10)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x_{n+1}^*\right)\right) - f'(x_n)}\right)$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha + \left(-e_n - \frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$e_{n+1} = -\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.12.11}$$

Persamaan (3.12.11) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat ketiga.

3.12.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)}\right)$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'(x_n + x_{n+1}^*)$

BPF 3 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah ini memerlukan 3 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$\sqrt[3]{3} = 1.442$

3.13 Fifth Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah (FNHT)

Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah adalah gabungan persamaan Newton Min Harmonik Titik-Tengah dan kelas baru kedua.

$$u_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) \tag{2.15}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^{*}_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.8}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^{*}_{n+1})\right) - f'(x_n)} \tag{2.16}$$

3.13.1 Analisis Penumpuan

Menggunakan persamaan ralat bagi persamaan (2.15) dan (2.8) untuk mendapatkan persamaan ralat bagi (2.16),

$$e_{n+1} = -\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{3.12.11}$$

$$(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6) \tag{3.5.6}$$

Menggantikan (3.12.11) dan (3.5.6) ke dalam (2.16), kita boleh peroleh

$$\frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^{*}_{n+1})} =$$

$$-\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) - \left[(u_{n+1} - \alpha) - 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4) - (u_{n+1} - \alpha) + 2c_2^2 e_n^2 (u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= -\frac{1}{4}c_3e_n^3 + O(e_n^4) - \left(-\frac{1}{4}c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) + 2c_2^2e_n^2(u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2e_n^2(u_{n+1} - \alpha) + O(e_n^6)$$

$$= 2c_2^2e_n^2\left(-\frac{1}{4}c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) + O(e_n^6)$$

$$= -\frac{1}{2}c_2^2c_3e_n^5 + e_n + O(e_n^6)$$

Gantikan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, dan $x_n = e_n + \alpha$, kita boleh selesaikan persamaan ralat ini.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left(-\frac{1}{2}c_2^2c_3e_n^5 + e_n + O(e_n^6)\right)$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_2^2c_3e_n^5 + O(e_n^6) \qquad (3.13.1)$$

Persamaan (3.13.1) membuktikan ia adalah persamaan penumpuan peringkat kelima.

3.13.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}^*)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 2 = $f'(x_n + x_{n+1}^*)$

BPF 3 = $f(u_{n+1})$

BPF 4 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah ini memerlukan 4 BPF sahaja.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[4]{5} = 1.495$$

3.14 Kaedah Fifth Newton Harmonik Titik-Tengah Kedua (FNHT2)

Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah Kedua ini sama seperti Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah, di mana kita hanya menukarkan gabungan persamaan Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah dan kelas baru pertama kepada persamaan Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah dan kelas baru pertama.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) \tag{2.15}$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^{*}_{n+1})} \tag{2.7}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^{*}_{n+1})}$$

3.14.1 Analisis Penumpuan

Oleh sebab persamaan ralat bagi kedua-dua persamaan kelas baru newton (2.7) dan (2.8) adalah sama, maka Persamaan Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah Kedua mempunyai persamaan ralat seperti Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah.

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_2^2 c_3 e_n^5 + O(e_n^6) \tag{3.13.1}$$

3.14.2 Bilangan Penilaian Fungsi (BPF)

Bilangan penilaian fungsi (BPF) adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'\left(\frac{1}{2}\left(x_n + x^{*}_{n+1}\right)\right) - f'(x_n)}\right) - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^{*}_{n+1})}$$

BPF 0 = $f(x_n)$

BPF 1 = $f'(x_n)$

BPF 3 = $f'(x^{*}_{n+1})$

BPF 3 = $f'\left(\frac{1}{2}(x_n + x^{*}_{n+1})\right)$

BPF 4 = $f(u_{n+1})$

BPF 5 = $f(x_{n+1})$

Maka, persamaan Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Titik-Tengah Kedua ini memerlukan 5 BPF.

Dengan menggunakan BPF dan peringkat penumpuan, kita boleh mengira indeks efisien sesuatu persamaan. Maka, indeks efisien bagi persamaan ini ialah:

$$\sqrt[5]{5} = 1.380$$

BAB 4

KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN

4.1 Pengenalan

Dalam bahagian ini, kita akan menunjukkan keputusan yang kita perolehi menerusi aturcara C++. Kita akan membuktikan keputusan ini dengan menggunakan fungsi-fungsi yang telah diberikan. Dan kita juga akan menyokong keputusan yang diperolehi ini dengan menggunakan fungsi-fungsi lain.

4.2 Fungsi-fungsi dan Keputusannya

Fungsi-fungsi yang diberikan $(f_1 - f_{15})$

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $x =$ -0.3

$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $x =$

$f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$, $x = 1$

$f_4(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$, $x = 2$

$f_5(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$, $x =$ -0.5

$f_6(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$, $x =$ -1.5

$f_7(x) = \sin(x)e^{-x} + \ln(x^2 + 1)$, $x = 1.5$

$f_8(x) = (x-)^3 - 1$, $x = 1.5$

$f_9(x) = (x-)^3 - 1, \qquad x = 3.5$

$f_{10}(x) = \cos(x) - x, \qquad x = 0.2,$

$f_{11}(x) = \cos(x) - x, \qquad x = 1.7$

$f_{12}(x) = x^2 + \sin(x/5) - 1/4, \qquad x = 0.3$

$f_{13}(x) = x^2 + \sin(x/5) - 1/4, \qquad x = 0.7$

$f_{14}(x) = e^x - 4x^2, \qquad x = 0$

$f_{15}(x) = e^x - 4x^2, \qquad x = 1$

Fungsi-fungsi yang digunakan untuk menyokong teori ini $(f_{16} - f_{37})$

$f_{16}(x) = -x^3 - \cos(x) \qquad x = \text{-}1$

$f_{17}(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) \qquad x = 1.55$

$f_{18}(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2 \qquad x = 4$

$f_{19}(x) = (x-2)^2 - \ln x \qquad x = 1$

$f_{20}(x) = e^x - 3x^2 \qquad x = 10.3$

$f_{21}(x) = 3x - e^x \qquad x = 10$

$f_{22}(x) = x + 3\cos(x) - e^x \qquad x = 8$

$f_{23}(x) = x^2 - 4x + 4 - \ln(x) \qquad x = 7$

$f_{24}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) \qquad x = 1.9$

$f_{25}(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9 \qquad x = 0$

$f_{26}(x) = x^2 - 10\cos(x) \qquad x = 50$

$f_{27}(x) = x^2 - 10\cos(x) \qquad x = 50$

$f_{28}(x) = 4x^2 - e^x - e^{-x} \qquad x = \text{-}1$

$f_{29}(x) = 4x^2 - e^x - e^{-x} \qquad x = \text{-}10$

$f_{30}(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \qquad x = 5$

$f_{31}(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} \qquad x = 5$

$f_{32}(x) = \cos\left(x + \sqrt{2}\right) + x\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{2}\right) \qquad x = 4$

$f_{33}(x) = 1 - 4x\cos(x) + 2x^2 + \cos(2x) \qquad x = 2$

$f_{34}(x) = x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 \qquad x = \text{-}6$

$f_{35}(x) = \sin(3x) + 3e^{-2x}\sin(x) - 3e^{-x}\sin(2x) - e^{-3x} \qquad x = 4$

$f_{36}(x) = e^{3x} - 27x^6 + 27x^4e^x - 9x^2e^{2x} \qquad x = 4$

$f_{37}(x) = e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 \qquad x = \text{-}0.13$

Nilai punca bagi fungsi $(f_1 - f_{37})$

$\alpha_1 = 1.36523$

$\alpha_2 = 1.36523$

$\alpha_3 = 0.25753$

$\alpha_4 = 0.25753$

$\alpha_5 = \text{-}1.20765$

$\alpha_6 = \text{-}1.20765$

$\alpha_7 = 3.70029\text{e-}021$

$\alpha_8 = 2$

$\alpha_9 = 2$

$\alpha_{10} = 0.739085$

$\alpha_{11} = 0.739085$

$\alpha_{12} = 0.409992$

$\alpha_{13} = 0.409992$

$\alpha_{14} = \text{-}0.407777$

$\alpha_{15} = 0.714806$

$\alpha_{16} = \text{-}0.865474$

$\alpha_{17} = 1.39775$

$\alpha_{18} = 3.72211$

$\alpha_{19} = 1.41239$

$\alpha_{20} = 3.73308$

$\alpha_{21} = 1.51213$

$\alpha_{22} = 0.976773$

$\alpha_{23} = 3.0571$

$\alpha_{24} = 1.89549$

$\alpha_{25} = -0.0406593$

$\alpha_{26} = 1.37936$

$\alpha_{27} = 1.37936$

$\alpha_{28} = -0.824499$

$\alpha_{29} = -4.30625$

$\alpha_{30} = 1.36523$

$\alpha_{31} = 0.567143$

$\alpha_{32} = -1.41356$

$\alpha_{33} = 0.739085$

$\alpha_{34} = -1.33435$

$\alpha_{35} = 4.20176$

$\alpha_{36} = 3.73309$

$\alpha_{37} = -0.169607$

Jadual 4.1 menunjukkan keputusan yang diperoleh bagi fungsi $(f_1 - f_{37})$ dengan menggunakan persamaan NK, KNA, KNT, KNH, KNHT, FNA, FNT, FNH dan FNHT.

Keputusan bagi penilaian bilangan fungsi (BPF).

Fungsi	NK	KNA	KNT	KNH	KNHT	FNA	FNT	FNH	FNHT
f_1	107	19	55	154	16	17	45	85	101
f_2	11	10	10	10	10	13	9	9	9
f_3	9	10	10	10	10	9	9	9	9
f_4	11	13	10	13	13	9	13	9	13
f_5	21	34	16	13	13	33	17	13	13
f_6	13	13	13	13	10	13	13	13	13
f_7	11	13	13	10	10	9	13	9	9
f_8	15	16	13	13	10	17	13	13	13
f_9	15	16	16	13	13	13	13	13	13
f_{10}	11	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{11}	9	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{12}	9	10	10	7	7	9	9	9	9
f_{13}	11	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{14}	15	13	13	13	13	13	13	13	13
f_{15}	11	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{16}	9	10	10	10	7	9	9	9	9
f_{17}	11	13	10	10	10	13	9	9	9
f_{18}	11	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{19}	11	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{20}	27	28	25	22	19	25	25	25	21
f_{21}	31	31	28	25	19	29	25	29	25
f_{22}	25	25	22	19	16	25	21	21	17

f_{23}	15	16	16	13	13	13	13	13	13
f_{24}	33	31	31	25	25	33	29	29	29
f_{25}	7	7	7	7	7	9	9	9	9
f_{26}	15	25	16	16	16	57	21	57	17
f_{27}	15	25	16	16	16	57	21	57	17
f_{28}	9	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{29}	25	28	22	22	16	25	21	21	17
f_{30}	15	16	16	13	13	17	13	13	13
f_{31}	53	49	49	40	40	49	49	45	45
f_{32}	61	61	58	49	43	57	57	53	49
f_{33}	53	49	49	40	40	49	49	45	45
f_{34}	29	28	28	25	19	29	25	25	21
f_{35}	9	10	10	10	10	9	9	9	9
f_{36}	55	52	49	52	79	49	97	45	41
f_{37}	15	16	16	13	13	17	13	13	13

Jadual 4.2 menunjukkan keputusan yang diperoleh bagi fungsi $(f_1 - f_{37})$ dengan menggunakan persamaan NK, KNA, KNT, KNH, KNHT, FNA, FNT, FNH dan FNHT.

Keputusan bagi jumlah bilangan lelaran.

Fungsi	NK	KNA	KNT	KNH	KNHT	FNA	FNT	FNH	FNHT
f_1	53	6	18	51	5	4	11	21	25
f_2	5	3	3	3	3	3	2	2	2
f_3	4	3	3	3	3	2	2	2	2
f_4	5	4	3	4	4	2	3	2	3
f_5	10	11	5	4	4	8	4	3	3
f_6	6	4	4	4	3	3	3	3	3
f_7	5	4	4	3	3	2	3	2	2
f_8	7	5	4	4	3	4	3	3	3
f_9	7	5	5	4	4	3	3	3	3
f_{10}	5	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{11}	4	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{12}	4	3	3	2	2	2	2	2	2
f_{13}	5	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{14}	7	4	4	4	4	3	3	3	3
f_{15}	5	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{16}	4	3	3	3	2	2	2	2	2
f_{17}	5	4	3	3	3	3	2	2	2
f_{18}	5	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{19}	5	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{20}	13	9	8	7	6	6	6	6	5
f_{21}	15	10	9	8	6	7	6	7	6
f_{22}	12	8	7	6	5	6	5	5	4

f_{23}	7	5	5	4	4	3	3	3	3
f_{24}	16	10	10	8	8	8	7	7	7
f_{25}	3	2	2	2	2	2	2	2	2
f_{26}	7	8	5	5	5	14	5	14	4
f_{27}	7	8	5	5	5	14	5	14	4
f_{28}	4	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{29}	12	9	7	7	5	6	5	5	4
f_{30}	7	5	5	4	4	4	3	3	3
f_{31}	26	16	16	13	13	12	12	11	11
f_{32}	30	20	19	16	14	14	14	13	12
f_{33}	26	16	16	13	13	12	12	11	11
f_{34}	14	9	9	8	6	7	6	6	5
f_{35}	4	3	3	3	3	2	2	2	2
f_{36}	27	17	16	17	26	12	24	11	10
f_{37}	7	5	5	4	4	4	3	3	3

Jadual 4.3 menunjukkan keputusan yang diperoleh bagi fungsi $(f_1 - f_{37})$ dengan menggunakan persamaan FNA2, FNT2, FNH2, dan FNHT2.

Keputusan bagi penilaian bilangan fungsi (BPF).

Fungsi	FNA2	FNT2	FNH2	FNHT2
f_1	31	36	91	91
f_2	16	16	11	11
f_3	11	11	11	11
f_4	16	11	16	16
f_5	26	21	16	16
f_6	16	16	16	16
f_7	16	11	11	11
f_8	21	16	16	16
f_9	16	16	16	16
f_{10}	11	11	11	11
f_{11}	11	11	16	11
f_{12}	11	11	11	11
f_{13}	11	11	11	11
f_{14}	16	16	16	16
f_{15}	11	11	11	11
f_{16}	11	11	11	11
f_{17}	16	16	11	11
f_{18}	11	11	11	11
f_{19}	11	11	11	11
f_{20}	31	31	26	26
f_{21}	36	36	31	31
f_{22}	26	31	26	21
f_{23}	16	16	16	16

f_{24}	36	36	36	36
f_{25}	11	11	11	11
f_{26}	21	86	51	41
f_{27}	21	86	51	41
f_{28}	11	11	11	11
f_{29}	26	31	26	21
f_{30}	16	21	16	16
f_{31}	61	61	56	56
f_{32}	71	71	66	61
f_{33}	61	61	56	56
f_{34}	31	36	31	31
f_{35}	11	11	11	11
f_{36}	61	136	56	86
f_{37}	21	21	16	16

Jadual 4.4 menunjukkan keputusan yang diperoleh bagi fungsi $(f_1 - f_{37})$ dengan menggunakan persamaan FNA2, FNT2, FNH2, dan FNHT2.

Keputusan bagi jumlah bilangan lelaran.

Fungsi	FNA2	FNT2	FNH2	FNHT2
f_1	6	7	18	18
f_2	3	3	2	2
f_3	2	2	2	2
f_4	3	2	3	3
f_5	5	4	3	3
f_6	3	3	3	3
f_7	3	2	2	2
f_8	4	3	3	3
f_9	3	3	3	3
f_{10}	2	2	2	2
f_{11}	2	2	3	2
f_{12}	2	2	2	2
f_{13}	2	2	2	2
f_{14}	3	3	3	3
f_{15}	2	2	2	2
f_{16}	2	2	2	2
f_{17}	3	3	2	2
f_{18}	2	2	2	2
f_{19}	2	2	2	2
f_{20}	6	6	5	5
f_{21}	7	7	6	6
f_{22}	5	6	5	4
f_{23}	3	3	3	3

f_{24}	7	7	7	7
f_{25}	2	2	2	2
f_{26}	4	17	10	8
f_{27}	4	17	10	8
f_{28}	2	2	2	2
f_{29}	5	6	5	4
f_{30}	3	4	3	3
f_{31}	12	12	11	11
f_{32}	14	14	13	12
f_{33}	12	12	11	11
f_{34}	6	7	6	6
f_{35}	2	2	2	2
f_{36}	12	27	11	17
f_{37}	4	4	3	3

Berdasarkan kepada keputusan yang diperoleh dalam jadual 4.1 – 4.4, kita dapat membuat beberapa perbincangan.

Sebelum kita beralih kepada perbincangan, kita lihat lebih teliti terlebih dahulu mengenai bilangan penilaian fungsi (BPF). BPF ini adalah bilangan fungsi yang diperlukan oleh suatu persamaan. Kaedah Newton Klasik memerlukan 2 bilangan penilaian fungsi sahaja. Persamaan penumpuan peringkat ketiga (KNA, KNT, KNH dan KNHT) memerlukan 3 bilangan penilaian fungsi. Manakala, persamaan penumpuan peringkat kelima (FNA, FNT, FNH dan FNHT) memerlukan 4 bilangan penilaian fungsi. BPF ini akan mempengaruhi kelajuan (indeks) sesuatu persamaan untuk menumpu atau memusat pada suatu titik.

Kita boleh mengira indeks efisien bagi setiap persamaan seperti berikut:

Kaedah Newton Klasik:

$$\sqrt{2} = 1.414$$

Persamaan peringkat ketiga:

$$\sqrt[3]{3} = 1.442$$

Persamaan peringkat kelima:

$$\sqrt[4]{5} = 1.495$$

Jelas sekali bahawa persamaan peringkat kelima jauh lebih baik berbanding persamaan peringkat ketiga dan Newton Klasik.

Jadual 4.1 ini membincangkan keputusan bilangan penilaian fungsi (BPF) bagi persamaan kaedah Newton Klasik (NK), kaedah Newton Min Aritmetik (KNA), kaedah Newton Min Titik-Tengah (KNT), kaedah Newton Min Harmonik (KNH), kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah (KNHT), kaedah Fifth Newton Aritmetik (FNA), kaedah Fifth Newton Titik-Tengah (FNT), kaedah Fifth Newton Harmonik (FNH), dan kaedah Fifth Newton Harmonik Titik-Tengah (FNHT). Keputusan menunjukkan bahawa persamaan penumpuan peringkat kelima adalah lebih baik berbanding dengan persamaan penumpuan ketiga dan Newton Klasik. Ini dibuktikan menerusi bilangan penilaian fungsi yang diperlukan oleh peringkat kelima adalah lebih rendah berbanding peringkat ketiga. Keputusan yang diperolehi dalam jadual 4.1 adalah sama dengan keputusan yang terdapat dalam jurnal yang ditulis oleh Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2007). (rujuk lampiran).

Begitu juga dengan keputusan yang diperoleh dalam jadual 4.2. Jumlah bilangan lelaran yang diperlukan adalah bergantung pada bilangan penilaian fungsi. Maka, bilangan lelaran yang diperlukan bagi peringkat kelima adalah lebih rendah berbanding peringkat ketiga.

Manakala jadual 4.3 membincangkan keputusan bilangan penilaian fungsi (BPF) dan jadual 4.4 membincangkan bilangan lelaran bagi persamaan Kaedah Fifth Newton Min Aritmetik Kedua (FNA2), Kaedah Fifth Newton Min Titik-Tengah Kedua (FNT2), Kaedah Fifth Newton Min Harmonik Kedua (FNH2), dan Kaedah Fifth Kaedah Newton Min Harmonik Titik-Tengah Kedua (FNHT2).

Seperti yang kita boleh lihat dalam analisis bab 3, persamaan-persamaan FNA2, FNT2, FNH2, FNHT2 adalah persamaan penumpuan peringkat kelima. Akan tetapi, persamaan ini memerlukan bilangan penilaian fungsi sebanyak 5. Maka, berbanding dengan persamaan peringkat kelima, persamaan baru peringkat kelima ini adalah kurang efisien.
Kita boleh mengira indeks efisien seperti berikut:

$$\sqrt[5]{5} = 1.380$$

Jelas sekali bahawa keempat-empat persamaan peringkat kelima ini kurang efisien berbanding persamaan peringkat kelima yang lain, ketiga dan Newton Klasik. Maka, kita tidak akan menggunakan persamaan peringkat kelima ini (abaikan).

BAB 5

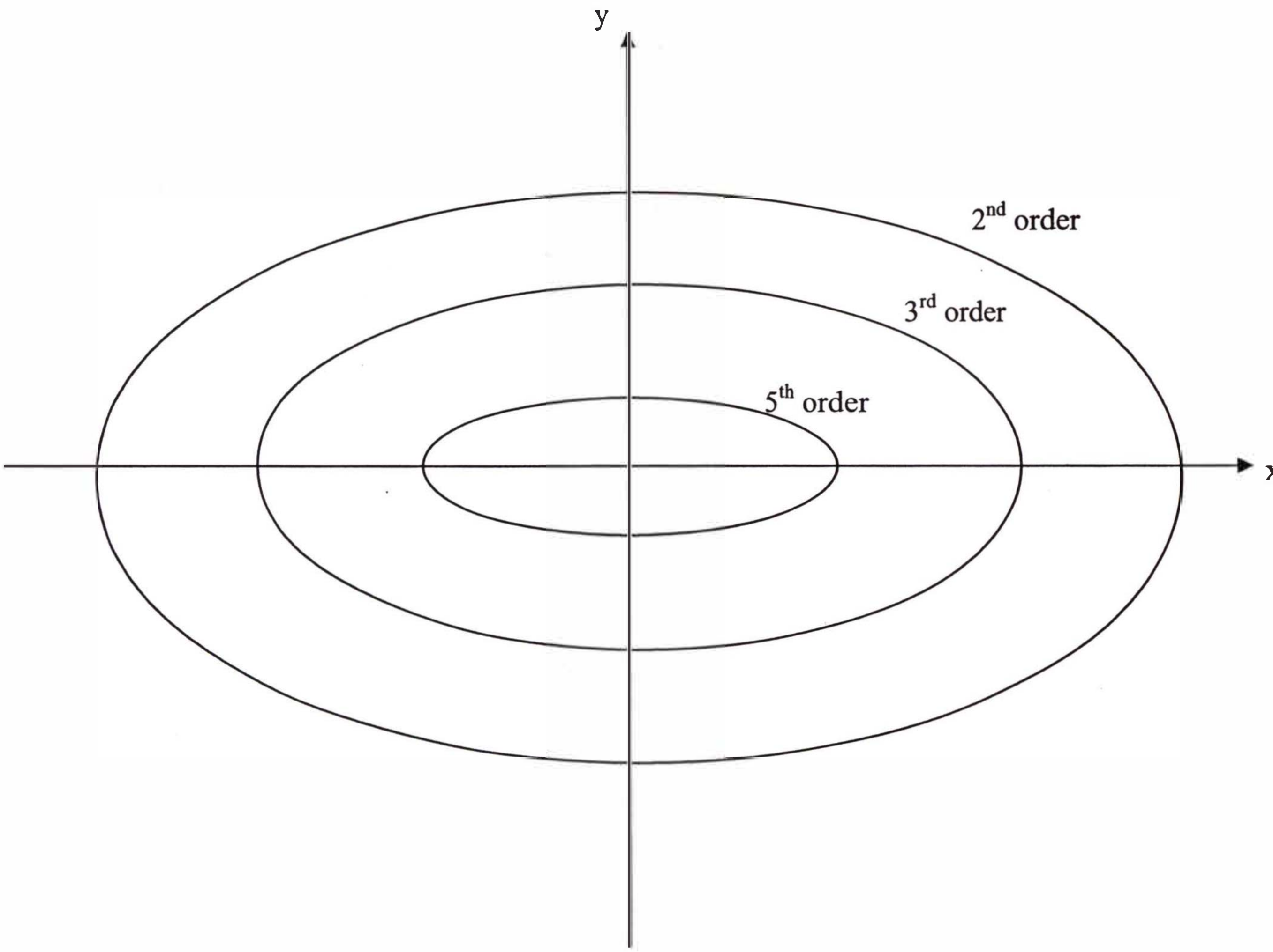
KESIMPULAN

5.1 Pengenalan

Bab ini akan membincangkan dengan lebih terperinci mengenai keputusan yang diperolehi dalam bab 4.

5.2 Kesimpulan

Secara keseluruhan, penyelidikan ini menyokong teori Kou Jisheng, Li Yitian dan Wang Xiuhua (2007) bahawa persamaan peringkat kelima mempunyai penumpuan yang lebih baik berbanding peringkat ketiga dan Newton Klasik. Juga ia mempunyai bilangan penilaian fungsi dan jumlah lelaran yang lebih kecil berbanding persamaan lain.



Rajah 5.1

Seperti yang ditunjukkan dalam rajah 5.1 di atas, kita dapat jelaskan perbezaan antara Kaedah Newton, persamaan penumpuan peringkat ketiga dan kelima.

Kecekapan sesuatu persamaan adalah bergantung pada nilai awal yang dipilih. Rajah 5.1 menjelaskan bahawa, kecekapan persamaan adalah dalam sesuatu lingkungan sahaja.

Sekiranya nilai awal x jatuh dalam lingkungan peringkat penumpuan kelima, maka persamaan peringkat kelima akan memberikan punca dengan lebih awal dan cepat. Walau bagaimanapun, persamaan peringkat ketiga dan Newton Klasik akan tetap memberikan punca tetapi lambat. Ini kerana indeks efisien peringkat ketiga kurang daripada peringkat kelima dan indeks efisien Newton Klasik kurang daripada peringkat ketiga.

Sekiranya nilai awal jatuh dalam lingkungan peringkat ketiga, peringkat ketiga akan lebih awal memberikan punca. Manakala Newton Klasik adalah lambat. Tetapi, persamaan peringkat kelima tidak akan berfungsi kerana nilai awalnya tidak terjatuh dalam lingkungan peringkat kelima.

Sama juga, sekiranya nilai awal jatuh dalam lingkungan peringkat kedua (Newton Klasik), maka persamaan Newton Klasik akan lebih awal memberikan punca. Akan tetapi persamaan peringkat ketiga dan kelima tidak akan berfungsi kerana nilai awalnya tidak terjatuh dalam lingkungan peringkat ketiga atau kelima.

Jadi, pilihan nilai awal bagi sesuatu persamaan adalah sangat penting untuk mendapatkan nilai punca secepat mungkin.

Secara keseluruhan, kita dapat simpulkan bahawa persamaan peringkat kelima adalah jauh lebih baik berbanding peringkat ketiga dan Newton Klasik. Peringkat kedua adalah lebih baik berbanding Newton Klasik. Persamaan peringkat kelima juga mempunyai bilangan penilaian fungsi dan lelaran yang lebih baik. Manakala, persamaan baru peringkat kelima adalah kurang efisien berbanding persamaan lain.

RUJUKAN

Kou J. S., Li Y., Wang X. 2007. Some modification of Newton's method with fifth-order convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 209: 146 – 152.

M. Frontini, E. Sormani 2003. Some variants of Newton's method with third-order convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 140: 419–426.

M. Frontini, E. Sormani 2003. Modified Newton's method with third-order convergence and multiple roots. *Journal of Applied Mathematics and Computation* 156: 345–354.

M. Frontini, E. Sormani 2004. Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations. *Journal of Applied Mathematics and Computation* 149: 771–782.

M. Grau, J.L. Díaz-Barrero 2006. An improvement of the Euler–Chebyshev iterative method. *J. Math. Anal. Appl* 315: 1–7.

H.H.H. Homeier 2003. A modified Newton method for rootfinding with cubic convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 157: 227–230.

H.H.H. Homeier 2004. A modified Newton method with cubic convergence: the multivariate case. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 169: 161–169.

H.H.H. Homeier 2005. On Newton-type methods with cubic convergence. Journal of Computational and Applied Mathematics. 176: 425–432.

A.Y. Özban 2004. Some new variants of Newton's method. *Appl. Math. Lett.* 17: 677–682.

S.Weerakoon, T.G.I. Fernando 2000. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Appl. Math. Lett.* 13: 87–93.

BIODATA PENULIS

Nama	: Rajee a/p Kerisnan
Alamat Tetap	: No. 38 Jalan Pinggiran 3/9, Taman Pinggiran, 68100 Batu Caves, Selangor Darul Ehsan.
Nombor Telefon	: 012-2224901
Email	: rgnanna@live.com
Tarikh Lahir	: 01 Nov 1986
Tempat Lahir	: Hospital Besar Kuala Lumpur (HBKL)
Kewarganegaraan	: Malaysia
Bangsa	: India
Jantina	: Perempuan
Agama	: Hindu
Pendidikan	: Jun 06/07-Dis 08/09: Sarjana Muda Sains (Matematik Kewangan) Jun 04-Dis 05: STPM (Sek. Men. Keb Darul Ehsan) Jan 99-Nov 03: Tingkatan 1-5 (Sek. Men. Keb. Sg. Kertas)

MEMBANDINGKAN PENUMPUAN PENGUBAHSUAIAN KAEDAH NEWTON BAGI PERINGKAT KETIGA DAN KELIMA - RAJEE A/P KERISNAN